**УДК 550.83**

*Дубовенко Ю.І., канд. фіз.-мат. наук, н.с.*
*Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України*
*М. Київ, пр. Палладіна, 32, тел.: 424-2052, dubovenko@igph.kiev.ua*

## ОПТИМІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО І ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ГРАВІМЕТРІЇ

В розвитку сучасних засобів інтерпретації даних геофізики спостерігається стійка тенденція до створення спеціалізованих програмних пакетів та інтегрованих середовищ для швидкого й надійного комп'ютерного експрес-аналізу та тлумачення цих даних майже одразу після вимірювань в польових умовах. В умовах зростаючих запитів щодо точності, швидкодії і зручності користування таких пакетів з'явились відомі програмні продукти як в ближньому (Сигма-3D, Вектор, Commodor), так і дальньому (SurGE, GM-Sys) зарубіжжі. Другий напрям в інтерпретації й моделюванні геофізичних даних передбачає використання окремих програмних модулів з розвинутих бібліотек програмного забезпечення для задач обчислювальної математики (IMSL, HSL, ATLAS, BLAS, NAG, Harwell, тощо) з метою розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), до яких зводяться в математичній постановці окремі математичні моделі геологічного середовища. Про успішне використання такого підходу на основі підпрограм з бібліотеки IMSL вказує робота [1].

Крім того для моделювання, візуалізації й перевірки гіпотез досить широко використовують універсальні математичні пакети (Maple, Mathematica, MatLab, MathCad, Derive, MuPad, SciLab) та графічні інформаційні системи (InGeo, ArcView). Згадані вище пакети й бібліотеки пропонують розрізнений набір методів, як правило, обмежених за точністю або порядком вирішуваних систем [2], або ж "заточених" під геологічну будову й фізичні обмеження конкретних територій. Цих методів достатньо для вирішення загальних задач лінійної алгебри, але не достатньо для розв'язання специфічних задач, що виникають в обернених задачах граві- та магнітометрії, що вимагають регуляризації і багатокрокових стратегій ітераційного покращення розв'язку. До того ж, практично всі ці пакети комерційні і досить дорогі. З огляду на це актуальність розробки подібного вітчизняного програмного забезпечення не викликає сумніву.

Задля стійкого чисельного розв'язання реальних задач структурної гравіметрії потрібно розвивати, як окремі модулі й надстройки, програмні засоби для вирішення СЛАР з розрідженими й погано обумовленими матрицями великої розмірності, застосовувати спеціальні методи апроксимації обернених операторів й оптимізації розв'язків. В згаданих вище засобах таких модулів немає.

Нами планується розробити комплекс програм, адаптованих для сучасних комп'ютерів, який передбачає розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричними й несиметричними розрідженими матрицями, до яких зводяться обернені задачі граві- і магнітометрії. В цьому комплексі передбачається розробка наступних блоків:

- вирішення прямої задачі гравіметрії для контактної поверхні;
- вирішення оберненої контактної задачі для поля, заданого на короткому інтервалі;
- аналітичне продовження гравіполя в верхній і нижній півпростір;
- згладження й апроксимація даних виміряного гравіполя;
- перетворення вхідних даних в різних картографічних проекціях;
- вирішення систем лінійних рівнянь з розрідженими матрицями.

Пряму задачу гравіметрії для кількох контактних поверхонь вирішуємо методом підбору шляхом апроксимації плоскої контактної поверхні набором трапецієвидних призм з вертикальними бічними сторонами (основою і вершиною). Сумарний гравітаційний вплив трапецій, що апроксимують контактні поверхні, з регіональним фоном, заданим ступеневим поліномом, визначається співвідношенням:

$$V_z(x_i, z_i) = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_\nu} A_{ij\nu} + \sum_{p=0}^{C} a_p x_i^p, \; i = \overline{1, M}, \; C \le 2,$$

де $N$ – кількість геологічних тіл моделі (однорідних шарів чи їх однорідних частин); $M$ – кількість точок, в яких обчислюється гравіполе $N_\nu$ – кількість трапецій, якими апроксимується $\nu$-те геологічне тіло; $A_{ij\nu}$ – гравітаційний ефект в $i$-тій точці $j$-ї трапеції з $\nu$-го геологічного тіла, що обчислюється з формули [3]

$$V_z(x,z) = f\sigma \left\{ \left[ \xi' \ln\left|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1\right| - 2a_1\left( \frac{\xi'}{a_1} - \frac{b_1}{2a_1^2} \ln\left|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1\right| + B_1'A_1 \right) - b_1\left( \frac{1}{2a_1} \ln\left|a_1\xi'^2 + b_1\xi' + c_1\right| - B_1''A_1 \right) \right] \Bigg|_{\xi'=\xi_1-x}^{\xi_2-x} - \right.$$

$$\left. - \left[ \xi' \ln\left|a\xi'^2 + b\xi' + c\right| - 2a\left( \frac{\xi'}{a} - \frac{b_1}{2a^2} \ln\left|a\xi'^2 + b\xi' + c\right| + B'A \right) - b\left( \frac{1}{2a} \ln\left|a\xi'^2 + b\xi' + c\right| - B''A \right) \right] \Bigg|_{\xi'=\xi_1-x}^{\xi_2-x} \right\},$$

де $a = (1 + k^2)$, $b = 2kp$, $c = p^2$, $k = i\left(h_2^{(b)} - h_1^{(b)}\right)$, $q = 1 - i(x - \xi_1)$, $p = k(x - \xi_1) + h_1^{(b)} - z$, $i = 1/(\xi_2 - \xi_1)$, і,
$a_1 = (1 + k_1^2)$, $b_1 = 2k_1 p_1$, $c_1 = p_1^2$, $k_1 = i\left(h_2^{(H)} - h_1^{(H)}\right)$, $p_1 = k_1(x - \xi_1) + h_1^{(H)} - z$, $i = 1/(\xi_2 - \xi_1)$, а також,

$$B_1'A_1 = \begin{cases} \dfrac{b_1^2 - 2a_1c_1}{2a_1^2} A_1, & p_1 \ne 0 \\ 0, & p_1 = 0 \end{cases}, \quad B_1''A_1 = \begin{cases} \dfrac{bl1}{2a_1} A_1, & p_1 \ne 0 \\ 0, & p_1 = 0 \end{cases}, \quad B'A = \begin{cases} \dfrac{b^2 - 2ac}{2a^2} A, & p \ne 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases}, \quad B''A = \begin{cases} \dfrac{b}{2a} A, & p \ne 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases}, \text{ і}$$

$A_1 = \dfrac{1}{|p_1|} \arctan \dfrac{2a_1\xi' + b_1}{2|p_1|}$, $A = \dfrac{1}{|p|} \arctan \dfrac{2a\xi' + b}{2|p|}$, якщо в ній покласти

$\sigma=\sigma_\nu$, $x=x_i$, $z=z_i$, $\xi_1=\xi_{j\nu}$, $\xi_2=\xi_{j+1,\nu}$, $h_1^{(b)}=h_{j\nu}^{(b)}$, $h_2^{(b)}=h_{j+1,\nu}^{(b)}$, $h_1^{(H)}=h_{j\nu}^{(H)}$, $h_2^{(H)}=h_{j+1,\nu}^{(H)}$, $h_{j\nu}^{(H)}=h_{j,\nu+1}^{(b)}$.

Для вирішення оберненої контактної задачі для поля, заданого похідною логарифмічного потенціалу на короткому інтервалі автором запропоновано систему лінійних інтегральних рівнянь зі швидкоспадними ядрами, дискретний вираз якої для загального випадку отримав назву узагальненого ітераційного процесу Лаврентьєва-Чорного [4]:

$$S_{n+1}^{+}(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{+}(\xi)\left(\cosh\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi+S_n^{+}(x),$$

$$S_{n+1}^{-}(x)=v(x)-\frac{1}{2\zeta_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}S_n^{-}(\xi)\left(\tanh\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n(x)}\right)^{-1}d\xi+S_n^{-}(x)$$

$$\zeta_0(x)=S_0^{+}(x)+S_0^{-}(x)=v(x),\ \zeta_0(x)=S_0^{+}(x)+S_0^{-}(x),\ n=\overline{0,\infty}.$$

Для аналітичного продовження гравіполя в верхній і нижній півпростір використовується методика Паркера на основі перетворень Фур'є згладженого вхідного сигналу. Для згладжування даних використовуються стандартні сплайнові методи і апроксимація методом спуску та найменших квадратів. Програмне забезпечення для перетворення картографічних координат перебуває в стадії розробки. Для вирішення систем лінійних рівнянь з розрідженими матрицями пропонується задіяти оптимальний метод біортогоналізації [5]. Так, здійснюючи для системи лінійних рівнянь, до яких зводяться задачі геофізики

$$Ax=b,\ A\colon R^{(n)}\to R^{(n)};\quad x,b\in R^{(n)},$$

перетворення $\xi=U^{*}x$, де $U=[u_1,u_2,\dots,u_n]$ – ортогональна матриця з вектор-стовпців $u_i$, $i=1,2,\dots,n$, отриманих методом ортогональних ітерацій, з урахуванням рівності $AU=UB$ отримаємо простішу систему $B\xi=U^{*}b$ з тридіагональною матрицею $B$. Якщо початкові вектори $u_1$ і $v_1=Av_0$, $u_1,v_1,v_0\in R^{(n)}$ і структура невиродженої несиметричної матриці $A\colon R^{(n)}\to R^{(n)}$ забезпечують нормальний перебіг процесу обчислень за рекурентними формулами

$$u_k=Au_{k-1}-\beta_{k-1,k-1}u_{k-1}-\beta_{k-1,k-2}u_{k-2},\quad v_k=A^{*}v_{k-1}-\beta_{k-1,k-1}v_{k-1}-\beta_{k-1,k-2}v_{k-2},\quad k=2,3,\dots,n,$$

$u_2=Au_1-\beta_{11}u_1,\quad v_2=A^{*}v_1-\beta_{11}v_1$ векторів двоїстого базису $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ в $R^{(n)}$, де

$$\beta_{kk}=\frac{(Au_k,v_k)}{(u_k,v_k)},\quad k=1,2,\dots,n,\ \beta_{k,k-1}=\frac{(u_k,v_k)}{(u_{k-1},v_{k-1})},\quad k=2,3,\dots,n,$$

то розв'язок системи лінійних рівнянь $Ax=b$, у вигляді $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_{0i}u_i$, отримаємо за $n$ послідовних кроків наближень:

$$x^{(1)}=\frac{(b,v_0)}{(u_1,v_1)}u_1,\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\frac{(r_k,v_{k-1})}{(u_k,v_k)}u_k,\ r_k=b-Ax^{(k)},\ x^{(k)}=\sum_{i=1}^{k-1}\xi_{ki}u_i,\ k=2,3,\dots,n.$$

Ці програмні і математичні засоби органічно доповнять існуючу базу автоматизованих засобів інтерпретації даних потенціальних полів для вирішення задач як рудної так і структурної гравіметрії.

1. *Якимчик А.И., Дубовенко Ю.И., Черная О.А*. Построение линейных аналитических аппроксимаций по результатам гравиметрических сьемок морских акваторій // Мат. 8-ї міжн. наук. конф. „Моніторинг небезпечних геологічних процесів та екологічного стану середовища", Київ, 30.09-1.10.07. – К., 2007.; 2. *Hansen P.C.* Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms/ – 1994, № 6. – pp. 1-35. See soft on http://www.netlib.org; 3. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1978. – 228 с.; 4. *Дубовенко Ю.І.* Визначення контактної границі за значеннями похідних логарифмічного потенціалу на істотно обмежених множинах: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. 04.00.22. К., 2005. – 19 с.; 5. *Якимчик А.І., Чорна О.А.* Про узагальнення одного методу розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь на випадок несиметричної матриці, що мають місце в задачах геофізики // Доп. НАН України. – 2006, № 7. – С. 139-143.